Click to verify

Üçgende açı kenar bağıntıları

1. Bir üçgende ölçüsü büyük olan açının karşısındaki kenar uzunluğu, ölçüsü küçük olan açının karşısındaki kenar uzunluğundan daha büyüktür. ABC üçgeninde m(A) > m(B) > m(C) a > b > c Terside geçerlidir. Uzun kenarı gören açı kısa kenarı gören açıdan daha büyüktür. ıkizkenar üçgenden de bildiğimiz gibi eşit açıların karşılarındaki kenarlar eşittir. m(B) = m(C) => |AB| = |AC| m(A) < m(B) = m(C) ise |BC| < |AB| = |AC| olur. Bir üçgende bir tane geniş açı olabileceğinden geniş açının karşısındaki kenar daima en büyük kenar olur. 2. Bir üçgende herhangi bir kenarın uzunluğu diğer iki kenarın uzunlukları toplamından küçük farkının mutlak değerinden büyüktür.ABC üçgeninde Diğer kenarlar için de aynı durum geçerlidir. |a – c| < b < (a + c) ve |a – b| < c < (a + b) olur. 3. Dik, dar ve geniş açılı üçgenlerde kenarlar arasındaki ilişkiler.a. Bir dik üçgende kenarlar arasında a2 = b2 + c2 bağıntısı vardır. b. Dar açılı üçgenb ve c sabit tutulup A açısı küçültülürse a da küçülür. m(A) < 90° Û a2 < b2 + c3 c. Geniş açılı üçgen b ve c sabit tutulup A açısı büyütülürse a da büyür. m(A) < 90° Û a2 > b2 + c3 4. Çeşitkenar bir üçgende aynı köşeden çizilen yükseklik, açıortay ve kenarortay uzunluklarının sıralanması, |AH| = ha ; yükseklik |AN| = nA ; açıortay |AD| = Va ; kenarortay 5. Çeşitkenar bir üçgende, açı, açıortay, kenarortay ve yükseklik arasındaki sıralama; ABC üçgeninde a, b, c kenar uzunluklarıdır. m(A) > m(B) > m(C) olduğuna varsayalım. Bu durumda üçgende kenarlar : a > b > c yükseklikler : ha < hb < hc Açıortaylar : nA < nB < nC Kenarortaylar : Va < Vb < Vc şeklinde sıralanırlar. Yani üçgenin yardımcı elemanları kenarlarının sırasına ters olarak sıralanır. Eşkenar ve ikizkenar üçgen için bu sıralamalar geçerli değildir. 6. Bir kenarları ortak olan içiçe iki üçgenden içtekinin çevresi daha küçük olur. |BD| + |DC| < |AB| + |AC| ABCD bir dörtgen, a, b, c, d kenar uzunlukları [AC] ve [BD] köşegenlerdir. ABCD dörtgeninde karşılıklı kenarların uzunlukları toplamı, köşegenlerin uzunlukları toplamından küçüktür. a + c < |AC| + |BD| ve b + d < |AC| + |BD| köşegen uzunlukları toplamı çevreden daha büyük ve çevrenin yarısından daha küçük olamaz. ıç içe şekillerde içteki şeklin çevresi daha küçük olacağından |DA| + |AB| + |BC| toplamı |DE| + |EF| + |FC| toplamından daha büyüktür. 7. ABC üçgeninin içindeki herhangi bir P noktası için;|AP| + |BP| + |CP| toplamı ABC üçgeninin çevresinden büyük, çevresinin yarısından küçük olamaz. Burada ve Çevre değerleri sınır değer değildir. ÜÇGEN Doğrusal olmayan üç noktayı birleştiren üç doğru parçasının birleşimine üçgen denir. AB] È[AC]È [BC] = ABC dir. Burada; A, B, C noktaları üçgenin köşeleri, [AB], [AC], [BC] doğru parçaları üçgenin kenarlarıdır. BAC, ABC ve ACB açıları üçgenin iç açılarıdır. |BC| = a, |AC| = b, |AB| = c uzunluklarına üçgenin kenar uzunlukları denir. iç açıların bütünleri olan açılara dış açılar denir. ABC üçgeni bir düzlemi; üçgenin kendisi, iç bölge, dış bölge, olmak üzere üç bölgeye ayırır. ABC È {ABC iç bölgesi} = (ABC) (üçgensel bölge) ÜÇGEN ÇEŞİTLERi 1. Kenarlarına göre üçgen çeşitleri a. Çeşitkenar üçgen Üç kenar uzunlukları da farklı olan üçgenlere denir. b. ikizkenar Üçgen Herhangi iki kenar uzunluklarıeşit olan üçgenlere denir. c. Eşkenar Üçgen Üç kenar uzunluklarında eşit olan üçgenlere denir. 2. Açılarına göre üçgenler a. Dar açılı üçgen Üç açısının ölçüsü de 90° den küçük olan üçgenlere dar açılıüçgen denir. b. Dik açılı üçgen Bir açısının ölçüsü 90° ye eşit olan üçgenlere denir. Dik üçgen olarak adlandırılır. c. Geniş açılı üçgen Bir açısının ölçüsü 90° den büyük olan üçgenlere denir. Bir üçgende bir tek geniş açı olabilir. ÜÇGENİN TEMEL ve YARDIMCI ELEMANLARI Üçgenin kenarları’ na ve açıları’ na temel elemanlar, Yükseklik, kenarortay ve açıortaylarına yardımcı elemanlar denir. 1. Yükseklik Bir köşeden karşı kenara veya karşı kenarın uzantısına çizilen dik doğru parçasına yükseklik denir. ha ® a kanarına ait yükseklik. hc ® c kenarına ait yükseklik yüksekliklerin kesim noktasına üçgenin Diklik Merkezi denir. 2. Açıortay Üçgenin bir köşesindeki açıyıki eş parçaya ayıranışına o köşenin açıortaydırdır. nA ® A köşesine ait iç açıortay n’A ® A köşesine ait dış açıortay 3. Kenarortay Üçgenin bir kenarının orta noktasını karşısındaki köşe ile birleştiren doğru parçasına o kenara ait kenarortay denir. |AD| = Va , |BE| = Vb olarak ifade edilir. Dik üçgende, hipotenüse ait kenarortay hipotenüsün yarısına eşittir. |BC| = a (hipotenüs) ÜÇGENDE AÇI ÖZELLİKLERİ 1. Üçgende iç açıların ölçüleri toplamı180° dir. [AD // [BC] olduğundan, iç ters ve yöndeş olan açılar bulunur. a + b + c = 180° m(A) + m(B) + m(C) = 180° Üçgenin iç açılarının toplamı180° dir. ıç açılara komşu ve bütünler olan açılara dış açı denir. 2. Üçgende dış açıların ölçüleri toplamı360° dir. a’ + b’ + c’ = 360° m(DAF)+m(ABE)+m(BCF)=360° 3. Üçgende bir dış açının ölçüsü kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşittir. [AB] // [CE olduğundan m(DAC) = m(A’) = b + c m(DBE) = m(B’) = a + c m(ECF) = m(C’) = a + b Yandaki şekilde a, b, c bulundukları açıların ölçüleri ise, 4. iki kenarı eş olan üçgene ikizkenar üçgen denir.ABC üçgeninde: Burada A açısına ikizkenar üçgenin tepe açısı, [BC] kenarına ise tabanıdenir. Tepe açısına m(BAC) = a dersek Taban açıları 5. Üç kenarıeş olan üçgene eşkenar üçgen denir. ABC üçgeninde |AB| = |BC| = |AC| m(A) = m(B) = m(C) = 60° Eşkenar üçgen, ikizkenar üçgenin bütün özelliklerini taşır. ÜÇGENDE AÇIORTAYLAR 1. Üçgende iç açıortaylar bir noktada kesişirler. Bu nokta üçgenin içteğet çemberinin merkezidir. Açıortayların kesiştiği noktadan kenarlara çizilen dikmelerin uzunluklarıeşittir. (Çemberin yarıçapı) 2. Üçgende iki dış açıortay ile üçüncü iç açıortay bir noktada kesişirler. Bu nokta üçgenin dıştan teğet çemberlerinden birinin merkezidir. (Üç dış teğet çember vardır.) [AD], [BD] ve [CD] açıortaylarından herhangi ikisi verildiğinde üçüncüsünün de kesinlikle açıortaydır. 3. iki iç açıortayın kesişmesiyle oluşan açı; ABC üçgeninde ve BDC üçgeninde iç açılar toplamı yazılırsa 4. iki dış açıortayın kesişmesiyle oluşan açı; ABC üçgeninin dış açılar toplamıve BDC üçgeninin iç açılar toplamını yazarsak 5. Bir iç açıortay ile bir dış açıortayın kesişmesiyle oluşan açı, ABC üçgeninin C açısının dış açıortayı ile B açısının iç açıortayı arasındaki açının ölçüsü A açısının ölçüsünün yarısıdır. Burada D noktası dış teğet çemberlerden birinin merkezi olduğundan, A dan çizilen dış açıortayda D noktasından geçer. 6. Açıortayla yükseklik arasında kalan açı; ABC üçgeninde [AD] A açısına ait açıortay ve [AH] yükseklikti. Açıortayla yükseklik arasındaki açıya m(HAD) = x dersek Bir açı ve açıortayını başka bir doğrunun kestiği durumlarda dış açı özelliği kullanılarak bütün açılar bulunabilir. İlgili Konular #açılarına göre üçgenler #açıortay #çeşitkenar üçgen #dar açılı üçgen #dik açılı üçgen #eşkenar üçgen #geniş açılı üçgen #ikizkenar üçgen #kenarortay #üçgen çeşitleri #üçgenler Bir üçgende ölçüsü daha geniş olan açının gördüğü kenar daha uzundur. Benzer şekilde daha uzun kenarın karşısındaki açı daha geniştir. Buna göre, bir üçgenin köşe açılarının ölçüleri ve bu açıların gördüğü kenarların uzunlukları arasındaki sıralama aymıdır.Bir üçgende bir köşe açısı 90°'den küçükse karşı kenar uzunluğu Pisagor teoremi ile hesaplanan hipotenüs uzunluğundan küçük olur. Benzer şekilde, bir köşe açısı 90°'den büyükse karşı kenar uzunluğu Pisagor teoremi ile hesaplanan hipotenüs uzunluğundan büyük olur.Yukarıda bahsettiğimiz açı - kenar bağıntıları belirli bir üçgen için geçerli olup üçgenler arasında böyle bir kıyaslama yapılamaz. Buna göre örneğin bir üçgende 30°'lik açının gördüğü kenar başka bir üçgende 60°'lik açının gördüğü kenardan uzun olabilir.Bu teoreme göre, iki üçgenin ikişer kenar uzunluğu eşitse bu iki kenarın arasındaki açısı daha büyük olan üçgenin üçüncü kenar uzunluğu diğer üçgenin üçüncü kenar uzunluğundan büyüktür.Bu kuralın karşıtı da doğrudur, yani üçüncü kenar uzunluğu daha büyük olan üçgende iki kenar arasındaki açı daha büyüktür.Bir üçgenin herhangi bir kenarının uzunluğu diğer iki kenarının uzunlukları toplamından küçük, farkının mutlak değerinden ise büyüktür.Üçgen eşitsizliğini aşağıdaki şekildeki üçgen üzerinden anlatmaya çalışalım. Bu eşitsizliğe göre \(a \) uzunluğu \(b \) ve \(c \) uzunlukları toplamından küçüktür. Üçgenin \(C \) köşesini gitgide \([AB] \) kenarına yaklaştırırsak \(b + c \) uzunluğu gitgide küçülerek \(a \) uzunluğuna yaklaşır. \(a = b + c \) olduğu nokta \(C \) köşesinin \([AB] \) doğru parçası üzerine geldiği noktadır, ancak bu durumda üç köşe noktası üçgen değil bir doğru oluştururlar, dolayısıyla \(C \) köşesi \([AB] \) kenarına ne kadar yaklaşırsa yaklaşsın \(a \lt b + c \) eşitsizliği sağlanır.Benzer şekilde \(b \) uzunluğu \(a \) ve \(c \) uzunlukları farkından büyüktür. Üçgenin \(C \) köşesini gitgide \([AB] \) kenarına yaklaştırırsak (\(c \) uzunluğu kısaldığı için) \(a - c \) uzunluğu gitgide büyüyerek gitgide küçülen \(b \) uzunluğuna yaklaşır. \(b = a - c \) olduğu nokta \(C \) köşesinin \([AB] \) doğru parçası üzerine geldiği noktadır, ancak bu durumda üç köşe noktası üçgen değil bir doğru oluştururlar, dolayısıyla \(C \) köşesi \([AB] \) kenarına ne kadar yaklaşırsa yaklaşsın \(\abs{a - c} \lt b \) eşitsizliği sağlanır.Üçgen eşitsizliği iç içe iki üçgene aşağıdaki şekilde uygulabilir.Bir üçgenin iç açı ölçülerinin sıralaması ile; yükseklik, açıortay ve kenarortay uzunluk sıralamaları arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir.Herhangi iki (ikizkenar üçgen) ya da üç (eşkenar üçgen) köşeye ait açıların eşit olması durumunda bu köşelere ait yükseklik, açıortay ve kenarortay uzunlukları da eşit olur.Herhangi bir çeşitkenar üçgende, bir \(\widehat{A} \) açısına ait yükseklik (\(h_a \)), açıortay (\(n_a \)) ve kenarortayın (\(V_a \)) uzunluk sıralaması aşağıdaki gibidir. Kenar uzunlukları tam sayı ve birbirinden farklı ve çevresi 14 cm'den küçük olan kaç farklı üçgen çizilebilir? Çözümü Göster Bir üçgenin herhangi bir kenarının uzunluğu diğer iki kenarının uzunlukları toplamından küçük olur. Verilen şartları sağlayan farklı üçgenler aşağıdaki gibidir. 2-3-4 üçgeni 2-4-5 üçgeni 2-5-6 üçgeni 3-4-5 üçgeni 3-4-6 üçgeni Buna göre toplam 5 farklı üçgen yazılabilir. Soru sorun Soruda hata bildirin \(x, y \in \mathbb{Z} \) olmak üzere, Bir üçgenin kenar uzunlukları \(16 \), \(x \), \(y \) birimdir. \(xy = 45 \) olduğuna göre, bu üçgenin çevresi kaç birimdir? Çözümü Göster \(x \ge y \) olduğunu varsayalım. \(xy = 45 \) denkleminin sağlayan \((x, y) \) sıralı ikililerini bulalım. \((x, y) = \{ (45, 1), (15, 3), (9, 5) \} \) Verilen üçgen için üçgen eşitsizliğini yazalım. \(x - y \lt 16 \lt x + y \) Bulduğumuz sıralı ikililerden üçgen eşitsizliğini sadece \((15, 3) \) sağlar, buna göre üçgenin bilinmeyen kenarlarının uzunluğu 15 ve 3 birimdir. Üçgenin çevresi \(16 + 15 + 3 = 34 \) birim bulunur. Soru sorun Soruda hata bildirin \(ABC \) bir çeşitkenar üçgendir. \(\abs{AC} \gt \abs{BC}, \quad m(\widehat{ACB}) = 80° \) olduğuna göre, \(m(\widehat{ABC}) \)'nin alabileceği en küçük tam sayı değeri nedir? Çözümü Göster Bir üçgende daha uzun kenarın karşısındaki açı daha geniştir. \(\widehat{ABC} \) ve \(\widehat{BAC} \) açılarını eşit varsayarak ölçülerine \(x \) diyelim. \(2x + 80° = 180° \) \(x = 50° \) \(\abs{AC} \gt \abs{BC} \) olduğundan \(m(\widehat{ABC}) \gt m(\widehat{BAC}) \) olmalıdır. \(m(\widehat{ABC}) \)'nin en küçük değeri 50°'den büyük en küçük tam sayı olan 51° olabilir. \(m(\widehat{ABC}) = 51° \) bulunur. Soru sorun Soruda hata bildirin \(\abs{BC} = a, \abs{AC} = b, \abs{AB} = c \) \(b \lt a \lt c \) \(m(\widehat{BAC}) = 52° \) olduğuna göre, \(m(\widehat{ACB}) \)'nin alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır? Çözümü Göster Bir üçgende daha uzun kenarın karşısındaki açı daha geniştir. Buna göre üçgenin açı ölçüleri arasındaki sıralama aşağıdaki şekilde olur. \(m(\widehat{ABC}) \lt m(\widehat{BAC}) \lt m(\widehat{ACB}) \) \(m(\widehat{ACB}) \)'nin en küçük tam sayı değerini alması için \(m(\widehat{ABC}) \lt m(\widehat{BAC}) \) olmak koşuluyla \(m(\widehat{ABC}) \) en büyük tam sayı değerini almalıdır. \(m(\widehat{ABC}) = 51° \) \(m(\widehat{ACB}) = 180° - 52° - 51° \) \(= 77° \) bulunur. \(51° \lt 52° \lt 77° \) Soru sorun Soruda hata bildirin \(\abs{AB} = 4, \quad \abs{BC} = 9 \) \(\abs{CD} = 3, \quad \abs{AD} = 7 \) olduğuna göre, \(\abs{BD} \) hangi tam sayı değerlerini alabilir? Çözümü Göster \(\abs{BD} = x \) diyelim. Bu durumda \(ABD \) ve \(BCD \) üçgenleri için üçgen eşitsizlikleri aşağıdaki gibi olur. \(ABD \) üçgeni için: \(\abs{7 - 4} \lt x \lt \abs{7 + 4} \) \(3 \lt x \lt 11 \) \(BCD \) üçgeni için: \(\abs{9 - 3} \lt x \lt \abs{9 + 3} \) \(6 \lt x \lt 12 \) \(x \) uzunluğunun her iki üçgen için de üçgen eşitsizliğini sağlanması gerektiği için bulduğumuz eşitsizliklerin alt sınır değerlerinden büyük olanı, üst sınır değerlerinden de küçük olanı seçmeliyiz. \(6 \lt x \lt 11 \) Buna göre \(x \) aşağıdaki 4 tam sayı değeri alabilir. \(x \in \{7, 8, 9, 10\} \) bulunur. Soru sorun Soruda hata bildirin \(\abs{AB} = 6, \abs{BC} = 11, \abs{AC} = 3x - 1 \) olduğuna göre, \(x \)' in alabileceği tam sayı değerlerin toplamı kaçtır? Çözümü Göster \(ABC \) üçgeni için üçgen eşitsizliğini yazalım. \(\abs{6 - 11} \lt 3x - 1 \lt \abs{6 + 11} \) \(5 \lt 3x - 1 \lt 17 \) \(x \)'i eşitsizlikte yalnız bırakalım. \(6 \lt 3x \lt 18 \) \(2 \lt x \lt 6 \) Buna göre \(x \) aşağıdaki 3 tam sayı değeri alabilir. \(x \in \{3, 4, 5\} \) \(x \)'in alabileceği tam sayı değerlerin toplamı \(3 + 4 + 5 = 12 \) olur. Soru sorun Soruda hata bildirin \(\abs{AB} = 5, \quad \abs{BC} = 12 \) \(m(\widehat{BAC}) \lt m(\widehat{ABC}) \) olduğuna göre, \(\abs{AC} = x \)'in alabileceği değerler nedir? Çözümü Göster \(ABC \) üçgeni için üçgen eşitsizliğini yazalım. \(\abs{5 - 12} \lt x \lt \abs{5 + 12} \) \(7 \lt x \lt 17 \) Bir üçgende ölçüsü daha geniş olan açının gördüğü kenar daha uzundur. \(m(\widehat{BAC}) \lt m(\widehat{ABC}) \) olduğu için \(x \gt 12 \) olmalıdır. Yukarıdaki iki eşitsizliği birlikte sağlayan eşitsizlik aşağıdaki gibi olur. \(12 \lt x \lt 17 \) Buna göre \(x \) aşağıdaki 4 tam sayı değeri alabilir. \(x \in \{13, 14, 15, 16\} \) bulunur. Soru sorun Soruda hata bildirin \(\abs{AB} = 5, \abs{AD} = 9, \abs{DC} = 4 \) olduğuna göre, \(\abs{BC} = x \)'in alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır? Çözümü Göster \(\abs{BD} = y \) diyelim. \(x \) en büyük değerini \(y \) en büyük değerini aldığında alır. \(ABD \) üçgeni için üçgen eşitsizliğini yazalım. \(\abs{9 - 5} \lt y \lt \abs{9 + 5} \) \(4 \lt y \lt 14 \) \(y = 14 \) değerini alamasa da bu değeri \(BCD \) üçgeni için üçgen eşitsizliğinde üst sınır değeri olarak kullanabiliriz. \(BCD \) üçgeni için üçgen eşitsizliğini yazalım. \(\abs{14 - 4} \lt x \lt \abs{14 + 4} \) \(10 \lt x \lt 18 \) Buna göre \(x \)'in en büyük tam sayı değeri 17 olur. Soru sorun Soruda hata bildirin \([AB] \perp [DB] \) \(m(\widehat{BAC}) = 55°, m(\widehat{ACB}) = 50°, m(\widehat{ADB}) = 65° \) \(\abs{BC} = a, \abs{AC} = b, \abs{AB} = c \) \(\abs{AD} = d, \abs{DB} = e \) olduğuna göre, şekildeki en kısa kenar hangisidir? Çözümü Göster \(m(\widehat{ABC}) = 180° - (55° + 50°) = 75° \) Bir üçgende ölçüsü daha geniş olan açının gördüğü kenar daha uzundur. Buna göre \(ABC \) üçgeninde kenar uzunluklarının sıralaması aşağıdaki gibi olur. \(c \lt a \lt b \) \(m(\widehat{DAB}) = 180° - (90° + 65°) = 25° \) \(ADB \) üçgeninde kenar uzunluklarının sıralaması aşağıdaki gibi olur. \(e \lt c \lt d \) Birinci eşitsizlikte en kısa kenar \(c \), \(c \) kenarını da içeren ikinci eşitsizlikte ise \(e \)'dir. Buna göre verilen iki üçgende en kısa kenar \(e \) olur. Soru sorun Soruda hata bildirin \([BD] \), \([AC] \) kenarının kenarortayıdır. \(\abs{AB} = 6, \quad \abs{BC} = 8 \) \(ABC \) üçgeninin çevresi 20 birimdir. Buna göre \(\abs{BD} = x \)'in alabileceği kaç tam sayı değeri vardır? Çözümü Göster Üçgeninin çevresi 20 birimdir. \(6 + 8 + \abs{AC} = 20 \) \(\abs{AD} = \abs{DC} = 3 \) Bu durumda \(ABD \) ve \(BCD \) üçgenleri için üçgen eşitsizlikleri aşağıdaki gibi olur. \(ABD \) üçgeni için: \(\abs{6 - 3} \lt x \lt \abs{6 + 3} \) \(3 \lt x \lt 9 \) \(BCD \) üçgeni için: \(\abs{8 - 3} \lt x \lt \abs{8 + 3} \) \(5 \lt x \lt 11 \) Ayrıca \(D \) noktasından tabana paralel bir doğru çizelim ve bu doğru parçasının \([AB] \) kenarını kestiği noktaya \(E \) diyelim. \([ED] \parallel [BC] \) olduğu için bu doğru parçası üçgenin bir orta tabanıdır, dolayısıyla \([AB] \) kenarını ortalar ve uzunluğu tabanın yarısıdır. \(\abs{AE} = \abs{EB} = 3 \) \(\abs{ED} = 4 \) Oluşan \(BED \) üçgeninde de üçgen eşitsizliği sağlanmalıdır. \(\abs{4 - 3} \lt x \lt 4 + 3 \) \(1 \lt x \lt 7 \) Bulduğumuz iç eşitsizliği de sağlayan tam sayı \(x \) değeri sadece 6 olur. \(x \in \{6\} \) bulunur. Soru sorun Soruda hata bildirin \([ED] \perp [AB], \quad \abs{AD} = \abs{BD} \) \(\abs{EC} = 4, \quad \abs{AC} = 7 \) olduğuna göre, \(\abs{BE} = x \)'in alabileceği tam sayı değerleri nelerdir? Çözümü Göster \(A \) ve \(E \) noktalarını birleştirelim. \([ED] \) doğru parçası \([AB] \) kenarının hem yüksekliği hem de kenarortayı olduğu için \(ABE \) bir ikizkenar üçgendir. \(\abs{AE} = \abs{BE} = x \) \(AEC \) üçgeni için üçgen eşitsizliğini yazalım. \(\abs{7 - 4} \lt x \lt \abs{7 + 4} \) \(3 \lt x \lt 11 \) \(x \in [4, 10] \) aralığındaki tam sayı değerlerini alabilir. Soru sorun Soruda hata bildirin Bir yamuk ve bir üçgenden oluşan şekildeki uzunluk değerleri aşağıda verilmiştir. \(\abs{AB} = 3, \quad \abs{AE} = 5 \) \(\abs{CD} = 6, \quad \abs{DE} = 7 \) olduğuna göre, \(\abs{BC} = x \)'in alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır? Çözümü Göster \(B \) ve \(D \) noktalarını birleştirelim. Birden fazla adımda uygulayacağımız üçgen eşitsizliklerinde \(x \)'in en büyük değerini bulmak için diğer üçgenlerdeki bilinmeyen kenar uzunluklarının da en büyük değerlerini almalıyız. \(ABE \) üçgeni için üçgen eşitsizliğini yazalım. \(\abs{5 - 3} \lt \abs{BE} \lt \abs{5 + 3} \) \(2 \lt \abs{BE} \lt 8 \) \(\abs{BE} \) uzunluğu için üst sınır 8 birimdir. \(BED \) üçgeni için üçgen eşitsizliğini yazalım. \(\abs{8 - 7} \lt \abs{BD} \lt \abs{8 + 7} \) \(1 \lt \abs{BD} \lt 15 \) \(\abs{BD} \) uzunluğu için üst sınır 15 birimdir. \(BCD \) üçgeni için üçgen eşitsizliğini yazalım. \(\abs{15 - 6} \lt x \lt \abs{15 + 6} \) \(9 \lt x \lt 21 \) \(x = 21 \) olamayacağı için \(x \)'in en büyük değeri 20 olur. Soru sorun Soruda hata bildirin \([AB] \perp [AC] \) ve \(D \) noktası \(ABC \) üçgeninin iç bölgesinde bir noktadır. \(\abs{BD} = 12, \quad \abs{DC} = 5 \) olduğuna göre, \(\abs{BC} = x \)'in alabileceği tam sayı değerleri nelerdir? Çözümü Göster \(m(\widehat{BDC}) \) açısının 90°'den büyük ya da küçük olduğunu bulmaya çalışalım. \(m(\widehat{ABD}) = a, m(\widehat{DBC}) = b \) \(m(\widehat{ACD}) = c, m(\widehat{DCB}) = d \) diyelim. \(a + b + c + d + 90° = 180° \) \(a + b + c + d = 90° \) \(b + c \lt 90° \) Buna göre \(BDC \) üçgeninde \(m(\widehat{BDC}) \gt 90° \) olur. \(\widehat{BDC} \) açısı geniş açı olduğu için \(BDC \) üçgeninde en uzun kenarı görür. \(x \gt 12 \) \(BDC \) üçgeni için üçgen eşitsizliğini yazalım. \(\abs{12 - 5} \lt x \lt \abs{12 + 5} \) \(7 \lt x \lt 17 \) Ayrıca \(\widehat{BDC} \) açısı geniş açı olduğu için, \(x \) uzunluğu \(m(\widehat{BDC}) = 90° \) olduğu durumda oluşacak hipotenüs uzunluğundan büyük olmalı. \(x^2 \gt 12^2 + 5^2 \) \(x \gt 13 \) Bulduğumuz üç eşitsizliği de sağlayan en geniş aralık aşağıdaki gibidir. \(13 \lt x \lt 17 \) Buna göre \(x \) aşağıdaki 3 tam sayı değeri alabilir. \(x \in \{14, 15, 16\} \) Soru sorun Soruda hata bildirin \(\abs{AB} = 5, \abs{DE} = 3, \abs{BE} = 12 \) olduğuna göre, \(\abs{AC} + \abs{CD} \)'nin alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır? Çözümü Göster \(\abs{AC} = a, \abs{CD} = b \) \(\abs{BC} = x, \abs{CE} = y \) diyelim. İki üçgen için üçgen eşitsizliklerini yazalım. \(\abs{5 - x} \lt a \lt \abs{5 + x} \) \(\abs{3 - y} \lt b \lt \abs{3 + y} \) Eşitsizlikleri alt alta toplayalım. \(\abs{5 - x} + \abs{3 - y} \lt a + b \lt \abs{5 + x} + \abs{3 + y} \) \(x \) ve \(y \) pozitif değerler olduğu için eşitsizliğin sağındaki ifadeler mutlak değerden oldukları gibi çıkarlar. \(\abs{5 - x} + \abs{3 - y} \lt a + b \lt 5 + x + 3 + y \) \(x + y = 12 \) \(\abs{5 - x} + \abs{3 - y} \lt a + b \lt 20 \) Buna göre \(\abs{AC} + \abs{CD} \)'nin alabileceği en büyük tam sayı değeri 19'dur. Soru sorun Soruda hata bildirin \([BD] \perp [DC]\) \(\abs{AB} = 4, \quad \abs{AC} = 5 \) olduğuna göre, \(\abs{BC} = x \)'in alabileceği tam sayı değerleri nedir? Çözümü Göster \(ABC \) üçgeni için üçgen eşitsizliğini yazalım. \(\abs{4 - 5} \lt x \lt \abs{4 + 5} \) \(1 \lt x \lt 9 \) Ayrıca \(ABC \) üçgeni içinde bir dik üçgen oluştuğu için \(m(\widehat{BAC}) \) açısı 90°'den küçük olmalıdır, dolayısıyla \(\abs{BC} \) uzunluğu \(m(\widehat{BAC}) = 90° \) olduğu durumundaki hipotenüs uzunluğundan kısa olmalıdır. \(x^2 \lt 4^2 + 5^2 \) \(x \lt \sqrt{41} \) Bulduğumuz iki eşitsizliği de sağlayan en geniş aralık aşağıdaki gibidir. \(1 \lt x \lt \sqrt{41} \) Buna göre \(x \) aşağıdaki 5 tam sayı değeri alabilir. \(x \in \{2, 3, 4, 5, 6\} \) Soru sorun Soruda hata bildirin Kenar uzunlukları tam sayı ve çevresi 22 cm olan kaç üçgen çizilebilir? Çözümü Göster Üçgenin kenar uzunluklarına sırasıyla \(a \), \(b \) ve \(c \) diyelim. \(a + b + c = 22 \) Bir üçgende herhangi 2 kenar uzunluğu toplamı üçüncü kenar uzunluğundan büyüktür. Bu durumda herhangi 2 kenar uzunluğu toplamı \(\frac{22}{2} = 11 \)'den büyük ve herhangi bir kenar uzunluğu 11'den küçük olur. \(a + b \gt 11, b + c \gt 11, a + c \gt 11 \) \(a \lt 11, b \lt 11, c \lt 11 \) Bu koşulları sağlayan aşağıdaki üçgenler çizilebilir. 1) \(10, 10, 2 \) 2) \(10, 9, 3 \) 3) \(10, 8, 4 \) 4) \(10, 7, 5 \) 5) \(10, 6, 6 \) 6) \(9, 9, 4 \) 7) \(9, 8, 5 \) 8) \(9, 7, 6 \) 9) \(8, 8, 6 \) 10) \(8, 7, 7 \) Buna göre istenen koşulları sağlayan 10 üçgen çizilebilir. Soru sorun Soruda hata bildirin Kenar uzunlukları birer rakam olan ve eşkenar olmayıp ikizkenar olan kaç farklı üçgen çizilebilir? Çözümü Göster Üçgenin eşit kenarlarının uzunluğuna \(a \), üçüncü kenar uzunluğuna \(b \) diyelim. Üçgen eşitsizliğine göre, bir üçgenin iki kenar uzunluğunun toplamı üçüncü kenar uzunluğundan büyük, farkı üçüncü kenar uzunluğundan küçüktür. Farklı \(a \) değerleri için bu koşulu sağlayan \(b \) değerleri aşağıdaki gibidir. \(a = 1 \Rightarrow b \in \emptyset \) \(a = 2 \Rightarrow b \in \{ 1, 3 \} \) \(a = 3 \Rightarrow b \in \{ 1, 2, 4, 5 \} \) \(a = 4 \Rightarrow b \in \{ 1, 2, 3, 5, 6, 7 \} \) \(a = 5 \Rightarrow b \in \{ 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 \} \) \(a = 6 \Rightarrow b \in \{ 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 \} \) \(a = 7 \Rightarrow b \in \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 \} \) \(a = 8 \Rightarrow b \in \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 \} \) \(a = 9 \Rightarrow b \in \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \} \) Buna göre istenen koşulu sağlayan \(2 + 4 + 6 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 52 \) farklı üçgen çizilebilir. Soru sorun Soruda hata bildirin Bir üçgenin iki kenar uzunluğu 7 cm'dir. Bu üçgenin alanının en büyük olması için üçüncü kenar uzunluğu kaç cm olmalıdır? Çözümü Göster Verilen üçgenin alanını bulmak için sinüs teoremini kullanalım. Uzunlukları verilen kenarlara \(a \) ve \(b \), bu kenarların arasında kalan açıya \(\alpha \) diyelim. \(A = \dfrac{1}{2}ab\sin{\alpha} \) Üçgenin alanının en büyük olması için \(\sin{\alpha} \) en büyük değerini almalıdır, dolayısıyla \(\alpha \) açısı 90° olmalıdır. Üçgenin üçüncü kenarına \(c \) diyelim. Üçüncü kenar (hipotenüs) uzunluğunu bulmak için Pisagor teoremini kullanalım. \(c^2 = 7^2 + 7^2 \) \(c = 7\sqrt{2} \) olarak bulunur. Soru sorun Soruda hata bildirin \(k \in \mathbb{Z^+} \) olmak üzere, Bir üçgenin kenarları sırasıyla 8, 13 ve \(k \) cm uzunluğundadır. Kaç tane \(k \) değeri için bu üçgen geniş açılı üçgen olur? Çözümü Göster Kosinüs teoremine göre, geniş açılı bir üçgende en uzun kenarın karesi diğer iki kenarın karesinden büyük olur. Kosinüs teoremini kullanarak \(k \) değerinin sınırlarını bulalım. İlk önce \(k \) değerinin en uzun kenar olmadığı durumu inceleyelim. \(13^2 \gt 8^2 + k^2 \) \(169 \gt 64 + k^2 \) \(105 \gt k^2 \) \(k \le 10 \) Üçgen eşitsizliğine göre, \(k \) diğer iki kenar uzunlukları farkından büyük olmak zorundadır. \(5 \lt k \le 10 \) Şimdi \(k \) değerinin en uzun kenar olduğu durumu inceleyelim. \(k^2 \gt 13^2 + 8^2 \) \(k^2 \gt 233 \) \(k \ge 16 \) Üçgen eşitsizliğine göre, \(k \) diğer iki kenar uzunlukları toplamından küçük olmak zorundadır. \(16 \le k \lt 21 \) Her iki durumda bulduğumuz aralıkların birleşimi \(k \) değer aralığını verir. \(k \in (5, 10] \cup [16, 21) \) Bu aralıkta 10 tane tam sayı \(k \) değeri bulunur. Soru sorun Soruda hata bildirin Kenar uzunlukları birer tam sayı ve çevre uzunluğu 30 cm olacak şekilde oluşturulabilecek ikizkenar üçgenlerin, farklı uzunluktaki kenarının uzunluğunun alabileceği en büyük ve en küçük değerler arasındaki fark en çok kaç olabilir? Çözümü Göster İkizkenar üçgenin eşit uzunluktaki kenarlarının uzunluğuna \(a \) cm, diğer kenarının uzunluğuna \(b \) cm diyelim. Üçgen eşitsizliğine göre; bir üçgenin herhangi bir kenarının uzunluğu, diğer iki kenarının uzunlukları toplamından küçük, farkının mutlak değerinden büyük olmalıdır. Bu kuralı uzunluğu \(b \) olan kenara uygulayalım. \(\abs{a - a} \lt b \lt a + a \) \(0 \lt b \lt 2a \) İkizkenar üçgenin çevre uzunluğu 30 cm'dir. \(2a + b = 30 \) \(b = 30 - 2a \) Bu değeri yukarıda elde ettiğimiz eşitsizlikte yerine yazalım. \(0 \lt 30 - 2a \lt 2a \) \(2a \lt 30 \lt 4a \) \(a \lt 15 \lt 2a \) Bu eşitsizliği iki ayrı eşitsizlik olarak inceleyelim ve \(a \) değer aralığını bulalım. \(a \lt 15 \) \(15 \lt 2a\Longrightarrow 7,5 \lt a \) Buna göre \(a \) değer aralığı aşağıdaki gibi bulunur. \(7,5 \lt a \lt 15 \) \(a \)'nın bu aralıkta alabileceği tam sayı değerleri 8, 9, 10, 11, 12, 13 ve 14'tür. \(a \) bu değerleri alırken, \(2a + b = 30 \) denklemine göre \(b \) sırasıyla 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2 değerlerini alır. \(b \) değerinin alabileceği en büyük ve en küçük değerler arasındaki fark \(14 - 2 = 12 \) olarak bulunur. Soru sorun Soruda hata bildirin Üçgende açı ve kenar bağıntıları, geometriye girişte temel kurallardan biridir ve problem çözme sürecinde sıkça kullanılır. Bir üçgenin büyük açısının karşısında büyük bir kenar, küçük açısının karşısında ise küçük bir kenar bulunur. Ayrıca, üçgen eşitsizliği, herhangi bir üçgenin bir kenarının uzunluğunun diğer iki kenarın toplamından küçük, farkından ise büyük olması gerektiğini ifade eder. Bu kurallar, günlük hayatta mimari tasarımlar, köprüler ve yapı mühendisliği gibi birçok alanda uygulanır. Yeni müfredatta bu bilgil